

PARAGRAAF 4.1 : VERMENIGVULDIG- EN SOMREGEL

LES 1 : TELLEN VAN MOGELIJKHEDEN

VOORBEELD 1

Jan gaat eten bij de Merode. Hij kan kiezen uit

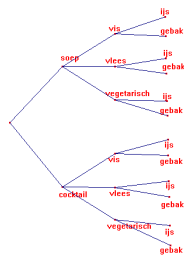
- 2 voorgerechten : soep of cocktail
- 3 hoofdgerechten : vis of bief of kip
- 2 nagerechten : ijs of gebak.

Hoeveel verschillende menu's kan Jan eten ?

DEFINITIES

Er zijn een aantal manieren om telproblemen weer te geven.

1. Boomdiagram :



$2 \times 3 \times 2 = 12$ mogelijkheden

2. Wegendiagram



$2 \times 3 \times 2 = 12$ mogelijkheden

3. Systematisch tellen :

Zet de eerste keuze vast (onderstrepen) en bepaal de rest erna

SVGSVYSBGSBYSKGSKYCVGCVYCBGCBYCKGCKY**4. Rooster (Werkt goed bij twee keuzes)**

Vb Je gooit met twee dobbelstenen. Bereken op hoeveel manieren je 9 ogen komt gooien.

Maak een rooster :

		dobbelsteen 1					
		1	2	3	4	5	6
dobbelsteen 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Je ziet dat er 4 mogelijkheden zijn.

LES 2 : MEERDERE EXPERIMENTEN ACHTER ELKAAR**DEFINITIE**

In de kansrekening is : OF = + EN = x

VOORBEELD 1

Zes ploegen gaan een competitie tegen elkaar spelen. Bereken het aantal wedstrijden als ze :

- a. Een hele competitie spelen
- b. Een halve competitie spelen

OPLOSSING 1

- a. Bij een hele competitie speel je uit en thuis tegen elkaar (2 keer).
Zes ploegen spelen elk 5 thuiswedstrijden.
Dus $6 \times 5 = 30$ wedstrijden.
- b. Bij een halve competitie speel je maar 1 keer tegen elkaar.
Dus $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = \frac{1}{2} \times 30 = 15$ wedstrijden.

VOORBEELD 2

In de volgende tabel staat de verdeling jongens-meisjes van de klassen 4, 5 en 6 op een scholengemeenschap.

Je kiest uit iedere klas één leerling.
Bereken het aantal mogelijkheden als:

- Je 3 jongens kiest.
- Je precies twee meisjes kiest.
- Je uit klas 5 een jongen kiest.

	klas 4	klas 5	klas 6	totaal
Jongen	45	42	38	125
Meisje	5	12	18	35
totaal	50	54	56	160

OPLOSSING 2

a. JJJ $\rightarrow 45 \times 42 \times 38 = 71820$

b. MMJ $\rightarrow 5 \times 12 \times 38 = 2280$

MJM $\rightarrow 5 \times 42 \times 18 = 3780$

JMM $\rightarrow 45 \times 12 \times 18 = \underline{9720} +$

Totaal $= 15780$

c. ?J? $\rightarrow 50 \times 42 \times 56 = 117600$

PARAGRAAF 4.2 MET EN ZONDER HERHALING

VOORBEELD 1

Er zijn 2 F-spelers, 3 E-spelers en 2 D-spelers. Op een dag wordt er een foto van ze gemaakt. Ze staan allemaal naast elkaar in een rij. Bereken het aantal mogelijke foto's :

- dat Jan in totaal kan maken.
- Met op de eerste en tweede plaats een E-speler.
- Eerst alle F-spelers, dan alle E-spelers en als laatste de D-spelers.

Jan geeft in een week op maandag, woensdag en vrijdag training. De hardst werkende speler van deze groep krijgt een compliment. Bereken het aantal mogelijkheden als Jan :

- Alleen F-spelers een compliment geeft
- Precies twee D-spelers een compliment geeft

OPLOSSING 1

$$\text{a. } ????????? = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$\text{b. } EE??????? = 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$\text{c. } FFEEDD = 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\text{d. } FFF = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\text{e. } DDD = 2 \times 2 \times 5 = 20$$

$$D\bar{D}D = 2 \times 5 \times 2 = 20$$

$$\bar{D}DD = \underline{5 \times 2 \times 2} = 20 +$$

$$\text{Totaal} = 60$$

VOORBEELD 2

Miep weet haar postcode niet meer. Een postcode bestaat uit 4 cijfers en 2 letters.

a. Hoeveel verschillende postcodes zijn er mogelijk?

Miep weet wel nog dat het vier verschillende cijfers waren.

b. Hoeveel verschillende postcodes zijn er nu nog mogelijk?

Miep weet ook nog dat de eerste twee cijfers 47 waren.

c. Hoeveel verschillende postcodes zijn er nu nog mogelijk?

Hans heeft een postcode waarvan de cijfers groter zijn dan 4800 en dat alle tekens verschillend zijn.

d. Hoeveel verschillende postcodes zijn er mogelijk voor Hans?

OPLOSSING 2

a. Aantal = $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 6.760.000$

b. Aantal = $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 26 \times 26 = 3.407.040$

c. Aantal 47?? ?? = $1 \times 1 \times 8 \times 7 \times 26 \times 26 = 37.856$

d. Er zijn 2 mogelijkheden :

1. Eerste getal 5/6/7/8/9 → Aantal = $5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 26 \times 25 = 1.638.000$

2. Eerste 4, Tweede 8/9 → Aantal = $1 \times 2 \times 8 \times 7 \times 26 \times 25 = 72.800$

Totaal mogelijkheden = $1.638.000 + 72.800 = 1.710.800$

PARAGRAAF 4.3 PERMUTATIES EN COMBINATIES

LES 1 : FACULTEIT

DEFINITIE

- (1) $N! = \{ N \text{ faculteit} \}$
(2) $N! = N \times N-1 \times \dots \times 2 \times 1$
(3) Dus $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (Spreek uit : 5 faculteit)
(4) GR : Math > Prob > !

VOORBEELD 1

In voetbalploeg VVS zitten 13 kinderen. Een fotograaf zet alle kinderen in één rij. Hoeveel verschillende rijen zijn er mogelijk ?

OPLOSSING 1

Aantal rijtjes = $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6227020800$

Dit kan sneller met $13!$ (= 13 faculteit).

VOORBEELD 2

In klas H4a zitten 7 leerlingen die een feest willen organiseren voor de klas. Het bestuur van deze feestcommissie bestaat uit een drankinkoper, een zaalregelaar en een muzikregelaar.

- a. Hoeveel verschillende besturen zijn er mogelijk ?
b. De zeven leerlingen gaan allen op een stoel zitten om een foto te maken. Hoeveel verschillende foto's kunnen er gemaakt worden ?

OPLOSSING 2

- a. Mogelijkheden (DZM) = $7 \times 6 \times 5 = 210$ (dit noemen ze het aantal permutaties maar dat gebruiken wij NOOIT)
b. Aantal Foto's = $7 \times 6 \times 5 \dots \times 1 = 7! = 5040$

LES 2 COMBINATIES EN PERMUTATIES**DEFINITIES**

- Combinaties = { Als het **GEEN** verschil maakt of je als 1^e of als 2^e wordt gekozen }
- Permutaties = { Als het **WEL** verschil maakt of je als 1^e of als 2^e wordt gekozen }
- Wij zullen i.p.v. permutaties zeggen dat we gewoon vermenigvuldigen

BEREKENEN COMBINATIES (OP GR)

$$\text{Aantal Combinaties} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{uitspraak } n \text{ boven } k)$$

- $n = \{ \text{aantal experimenten} \}$
- $k = \{ \text{aantal keer dezelfde letter} \}$
- Op GR : $\binom{n}{k} = nCr k$ (Math \rightarrow Prb)
- Vaak gebruik je combinaties bij tweekeuzeproblemen.

VOORBEELD 1

- Je kiest uit 8 leerlingen een voorzitter, secretaris en penningmeester.
- Je kiest uit 8 leerlingen een groep van 3 die een feest gaan organiseren.

OPLOSSING 1

- Volgorde **WEL** van belang dus vermenigvuldigen (ABC en BAC is **NIET** hetzelfde bestuur)

$$\text{Mog (ABC)} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

- Volgorde **NIET** van belang dus combinaties (ABC en BAC is dezelfde feestgroep)

$$\text{Mog (ABC)} = \frac{8!}{5!3!} = \binom{8}{3} = 8 nCr 3 = 56$$

VOORBEELD 2

Anne, Ben, Cas, Dex en Eline gaan winkelen. Twee van hen gaan winkelen bij de HEMA.

a. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

Daarna spelen ze een spelletje. Degene die eerste wordt krijgt 2 euro en degene die 2^e wordt krijgt één euro.

b. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

OPLOSSING 2

a. Het maakt **NIET** uit of eerst A gaat en dan B of eerst B en dan A → combinaties.

Er geldt : $n = 5$ en $k = 2$

$$\text{Mogelijkheden} = \binom{5}{2} = 10$$

b. Het maakt **WEL** uit of eerst A wint en dan B of andersom → vermenigvuldigen.

$$\text{Mogelijkheden} = 5 \times 4 = 20 \text{ mogelijkheden}$$

VOORBEELD 3

De hoofdtrainer van Fortuna heeft 5 hulptrainers. Hij kiest uit deze groep een trainer voor de A-jeugd, een voor de B-jeugd en een voor de C-jeugd.

- a. Bereken het aantal verschillende mogelijkheden voor de samenstelling van de jeugdtrainers van Fortuna.

De trainer van Roda speelt heeft 5 hulptrainers. Hij kiest uit deze groep drie trainers voor de A-jeugd.

- b. Bereken het aantal mogelijkheden voor de samenstelling van de jeugdtrainers van Roda.

OPLOSSING 3

- a. Het maakt **WEL** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus vermenigvuldigen.

$$\text{Mogelijkheden} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

- b. Het maakt **GEEN** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus COMBINATIES

$$\text{Mogelijkheden} = \binom{5}{3} = 10$$

PARAGRAAF 4.3 COMBINATIES TOEPASSEN

LES 1 MEERDERE COMBINATIES

VOORBEELD 1

In klas H4A zitten 8 jongens en 7 meisjes. 5 Leerlingen hebben deze week corvee. Bereken het aantal verschillende corveeploegen als er in de corveeploeg :

- 2 jongens en 3 meisjes zitten
- Precies 4 meisjes zitten
- Minstens 4 jongens zitten

OPLOSSING 1

Het maakt **GEEN** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus het zijn **COMBINATIES !!!**

$$\text{a. JJMMM} = \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3} = 28 \cdot 35 = 14 \cdot 70 = 980$$

$$\text{b. MMMMJ} = \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} = 8 \cdot 35 = 4 \cdot 70 = 280$$

$$\text{c. Minstens 4 jongens} = \text{JJJMJ of JJJJ}$$

$$\text{JJJMJ} = \binom{8}{4} \cdot \binom{7}{1} = 490$$

$$\text{JJJJ} = \binom{8}{5} \cdot \binom{7}{0} = 56 \quad \text{dus Totaal} = 490 + 56 = 546$$

VOORBEELD 2

Jan moet langs 7 stoplichten rijden. Er is alleen rood of groen. Hoeveel series (=mogelijkheden) zijn er

- Met 3 keer rood
- In totaal
- Als de laatste 2 rood zijn

OPLOSSING 2

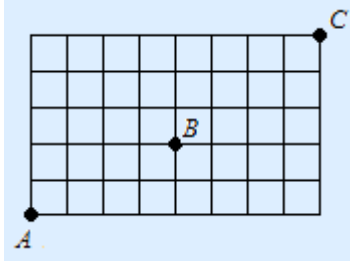
a. $RRRGGGGG = \binom{8}{3} = 56$

b. $???????? = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8 = 256$

{ of $0R + 1R + \dots + 8R = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{8} = 256$ }

c. $??????RR = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2^6 = 64$

LES 2 ROOSTERS



VOORBEELD 1

Frits loopt van punt A naar punt C.

- a. Bereken het aantal mogelijke wegen van A naar C.

Zijn broer Hans loopt altijd via punt B naar C.

- b. Bereken het aantal mogelijke wegen voor Hans.

Stefan kijkt naar MVV-Roda met eindstand 4 - 2.

- c. Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen van deze wedstrijd.

OPLOSSING 1

a. Weg AC = RRRRRRRRBBBBB = 8R en 5B \rightarrow Wegen = $\frac{13!}{8!5!} = \binom{13}{5} = 1287$

b. Weg AB = RRRRRBB = 5R en 2B \rightarrow Wegen = $\frac{7!}{5!2!} = \binom{7}{2} = 21$

Weg BC = RRRRBBB = 4R en 3B \rightarrow Wegen = $\frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{3} = 35$

A via B naar C = AC én CB = $21 \cdot 35 = 735$ wegen

c. MMMMR = $\frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2} = 15$ scoreverlopen